Algebra liniowa II. Lista 3

Zadanie 1. Niech odwzorowanie liniowe $T\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ będzie zadane macierzą

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć bazę, względem której macierz odwzorowania T ma postać Jordana. Wyznaczyć wszystkie podprzestrzenie niezmiennicze odwzorowania T

Zadanie 2. To samo zadanie dla odwzorowania $T\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ danego wzorem $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_2, x_3)$.

Zadanie 3. Niech $x_1, \ldots, x_m$ oznacza układ różnych liczb rzeczywistych i niech $m \geqslant n+1$. Na zbiorze par wielomianów $v, w \in \mathscr{P}^n(\mathbb{R})$ określmy przyporządkowanie

$$(v|w) = \sum_{i=1}^{m} v(x_i)w(x_i).$$

Wykazać, że określa ono iloczyn skalarny w $\mathscr{P}^n(\mathbb{R})$. Co by się stało, gdyby $m < n+1$?

Zadanie 4. Określmy na parach wektorów $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ odwzorowanie

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i.$$

Wykazać, że zachodzą następujące zależności

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \mathrm{re}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$ jeśli tylko $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$;
2. $\langle \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \beta\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$;
3. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle}$;
4. $\langle \boldsymbol{w}, \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} \rangle = \bar{\alpha}\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \rangle + \bar{\beta}\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle$;
5. $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle}$ (nierówność Schwarza)

Zadanie 5. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza odwzorowanie z poprzedniego zadania. Przyjmijmy oznaczenie $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$. Wykazać, że dla dowolnych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mamy

1. $|\alpha \boldsymbol{x}| = |\alpha||\boldsymbol{x}|$;

2. $|\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}| \leqslant |\alpha||\boldsymbol{x}| + |\beta||\boldsymbol{y}|$;

Podobnie jak w przypadku rzeczywistym, dwa wektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ są wzajemnie prostopadłe, jeśli $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$. Układ wektorów jest ortonormalny, jeśli czyni zadość tej samej definicji co w przypadku rzeczywistym (wykład).

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli σ jest permutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$ oraz $T \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ jest określone wzorem $T(x_1, \ldots x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$, to

1. wszystkie wartości własne odwzorowania T mają moduł 1;

2. $\mathbb{C}^n$ ma bazę złożoną z wektorów własnych; wektory można dobrać tak, by tworzyły bazę ortonormalną.